Математика и ботаника

Участники:

Алексей Асафьевич Оскольский **- кандидат биологических наук, старший научный сотрудник Ботанического института РАН (Санкт-Петербург)**

Соколов Дмитрий Дмитриевич **- доктор физико-математических наук, профессор физического факультета МГУ им М.В.Ломоносова**

Материалы к программе:

Для начала полезно напомнить, что до сих пор открыты не все виды высших растений (то же самое относится, конечно, и к животным, не говоря уже о различных микроорганизмах).

Но это только одна сторона вопроса – оказывается, что за даже за обычными, хорошо знакомыми названиями растений может скрываться огромное разнообразие видов, различаемых с большей или меньшей уверенностью. Например, определитель одуванчиков представляет собой увесистую книгу.

Классическая систематика растений опирается на морфологию, т.е. науку о формах растений. С другой стороны, наука о пространственных формах – это геометрия, область математики. Очень заманчиво привлечь геометрические идеи для того, чтобы не просто различать растения на глаз, а воспользоваться здесь методами точных наук.

В последние несколько десятилетий в геометрии действительно сформировалась область, которая рассматривает подобные вопросы. Это – фрактальная геометрия. В ней изучаются красивые объекты, многие из которых напоминают листья.

Вопрос об использовании методов точных наук в систематике и морфологии становится еще более острым в связи с использованием данных молекулярной биологии (о структуре генома). Эти данные безусловно несут бесценную информацию, но воспользоваться ей не просто – данные классической морфологии наглядны и их можно анализировать, опираясь на здравый смысл, зато они часто качественные, а не количественные. Молекулярные данные количественные, но совершенно не наглядные. Нужны какие-то объективные методы для их анализа. Как устроены компьютерные программы для анализа молекулярных данных?

Почему вообще применение методов математики так хорошо пошло в физике, а успехи математических методов в систематике растений гораздо скромнее?

Комментаторы "Путешествий Гулливера" Свифта отмечают, что между мирами лиллипутов, обычных людей и великанов Бробдингнега педантично выдержано **геометрическое подобие с масштабным коэффициентом** 12. Свифт внимательно следил за современной ему наукой и, возможно, знал сформулированную столетием раньше идею Галилея о том, что **законы природы не инвариантны относительно масштабных преобразований.** В самом деле, масса тела пропорциональна L^3, где L – характерный линейный размер тела, тогда как прочность костей пропорциональна L^2. Поэтому скелет великана в 12^2=144 раза относительно менее прочен, чем скелет лиллипута, так что при достаточно большом L великана раздавит вес своего тела. Однако Свифт проницательно описывает и принципиально иную возможность геометрической организации сообщества живых существ:

«Натуралистами открыты
У паразитов паразиты,
И произвел переполох
Тот факт, что блохи есть у блох.
И обнаружил микроскоп,
Что на клопе бывает клоп,
Питающийся паразитом,
На нем другой – ad infinitum»

(О поэзии. Рапсодия. Пер. С.Я.Маршака)

Такая структура, воспроизводящая много ярусов подобных блоков все уменьшающегося размера**, называется самоподобной**. Свойства самоподобных фигур существенно **отличаются от свойств кривых, поверхностей, пространственных областей, других привычных геометрических фигур.**

Математики научились изучать самоподобные объекты в середине прошлого века, и результаты их работы широко представлены в курсах математического анализа. Однако по дурной математической традиции эти результаты принято излагать как негативные примеры неспрямляемых кривых, неквадрируемых поверхностей и других отталкивающих объектов.

Важный шаг к количественному описанию самоподобных объектов сделал Г. Минковский, более известный как один из авторов математического аппарата специальной теории относительности. Он указал, как можно единообразным образом ввести понятия длины кривой, площади поверхности и объема пространственной области.

Пусть А – какая-то фигура в пространстве. Окружим все ее точки шариками малого радиуса ε, так что объединение этих шариков образует новую фигуру A_ε, которая называется ε-окрестностью фигуры А.

Вычислим теперь объем V(ε) фигуры A_ε. Нетрудно проверить, что если А состоит из N точек, то $V(\varepsilon) \approx N\varepsilon^3$. Для отрезка кривой длины L получится $V(\varepsilon) \approx 2\pi L\varepsilon^2$. Для области на поверхности, площадь которой равна S, $V(\varepsilon) \approx 2S\varepsilon$. Наконец, для пространственной области объема V получим $V(\varepsilon) \approx V\,\varepsilon^0$.

Минковский предложил считать эти соотношения подобия определениями длины кривой, площади поверхности и объема. Внимательный анализ показывает, что определения Минковского слегка отличаются от тех, которые изучаются в курсе математического анализа, но очень удобны во многих задачах.

В курсе математики учат, что **не всякая кривая имеет длину, не всякая поверхность имеет площадь, а не всякое тело – объем.** Великий математик Ф. Хаусдорф в 1918 г. обратил внимание на то, что стандартные примеры кривых без длины, поверхностей без площади и тел без объема представляют собой фигуры, для которых

$$V(\varepsilon) \approx M\varepsilon^\alpha, \qquad (1)$$

однако α не равно ни 3, как для точки, ни 2, как для линии, ни 1, как для поверхности, ни 0, как для пространственной области. Он предложил ввести **понятие дробной размерности,**

$$\dim A = 3 - \alpha, \qquad (2)$$

а M считать мерой (т.е. обобщением длины, площади, объема), которые благодарные потомки назвали хаусдорфовой размерностью и мерой Хаусдорфа. Мера Хаусдорфа измеряется в $см^{\dim A}$ и при целой хаусдорфовой размерности совпадает с длиной, площадью и объемом, понимаемыми по Минковскому. Хаусдорфову размерность удобно определять, строя график функции $V(\varepsilon)$ в координатах $\ln V - \ln \varepsilon$. Тогда степенная зависимость (1) соответствует прямолинейному участку графика, его наклон дает размерность, а точка пересечения с вертикальной осью – меру.

Итак, кривые без длины, поверхности без площади, области без объема на самом деле – просто фигуры с нецелой размерностью. Еще один известный математик, О. Гёльдер, показал, что дробная размерность тесно связана с плохой дифференцируемостью функции, которая задает, скажем, плохую кривую. Напомним, что производная функции $f(x)$ это предел отношения $\Delta f/\Delta x$ при $\Delta x \to 0$. Если этот предел не существует (скажем, бесконечен), то функция не дифференцируема, но **может существовать предел**

$$f^{(\mu)}(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f/\Delta x^{\mu},$$

который называется дробной производной, или показателем Гёльдера порядка μ. Дробная размерность прямо выражается через этот показатель.

Строго говоря, **понятие дробной размерности применимо не только к самоподобным объектам, но оно осмыслено именно для них**, причем сама размерность определяется характером подобия, а соображения Галилея оказываются неприменимыми просто потому, что у нашей фигуры нет, скажем, площади.

В первой половине XX века было обнаружено, что **объекты с дробной размерностью встречаются в повседневной жизни.** Более того, **знание их геометрии имеет** определенное, хотя и специфическое, **хозяйственное значение.**

Во время мировой войны выдающийся английский гидромеханик Ричардсон как образцовый гражданин стремился внести посильный вклад в оборону страны. Однако военное ведомство сомневалось в его способностях, так что поручило ему задачу, которая казалась по плечу любому – вычислить по географическим картам длину береговой линии Англии. Ричардсон подошел серьезно к важному правительственному заданию и через продолжительное время порадовал заказчика сообщением, что береговая линия Англии не имеет длины, а является объектом дробной размерности. Ответ заказчика на этот отчет история не сохранила в связи с соображениями общественной морали.

Менее известный, но гораздо более важный пример объекта с дробной размерностью представляет собой траектория броуновской частицы, или более научно – винеровского процесса, которая имеет 1/2 гёльдеровской производной и, соответственно, дробную размерность.

Ричардсон пользовался несколько иным определением дробной размерности и меры, чем те, которые даются соотношениями (1, 2). Сейчас математики построили целый набор различных размерностей самоподобных объектов.

Упомянутые и многие другие классики науки, принимавшие участие в развитии теории объектов с дробной размерностью, допустили одну небольшую, но очень важную оплошность – они не придумали красивого названия своей деятельности и не описали его в форме, хорошо доступной для потребителя. Это сделал уже в наши дни **Б.Мандельброт**, который **ввел для объектов с дробной размерностью название фрактала** и написал хорошим языком несколько книг на эту тему, что принесло ему мировую известность, несопоставимую с известностью Хаусдорфа.

Пример Мандельброта вызывает понятное чувство неприятия у профессиональных математиков. Однако в некотором смысле он представляет собой знаковое событие для нашего времени: из-за несоразмерного внимания к технической стороне вопроса и игнорирования интересов читателя **работы математиков давно уже стали непонятны не только для неспециалистов, но и для математиков, специализирующихся в смежных областях.** Поэтому своевременно появившаяся работа популяризатора может стать эпохальным явлением. Представляется, что **именно эта особенность предопределила несомненный кризис современной математики, выражающейся в неспособности предложить синтез идей и осмысление задач, подобный тому, который на пороге XX века предложил Гильберт.**

Концепция фракталов произвела огромное впечатление на научный мир. **Фракталы стали привлекать для описания самых разнообразных явлений.** Например, строение легких, способных организовывать эффективный обмен между кровью и воздухом в силу огромной площади, на которой происходит обмен, при ограниченном общем объеме, стали характеризовать как фрактальное. Однако постепенно энтузиазм сменяется более трезвой оценкой ситуации. Конечно, во всяком реальном теле закон (1) может поддерживаться только для какого-то ограниченного диапазона изменения ε, причем обычно этот диапазон не так и велик, чтобы настаивать на фрактальной природе объекта. Более важно другое соображение. Пусть мы в результате серьезных усилий показали, например, что фрактальная размерность легкого равна данному дробному числу. Спрашивается, насколько это приблизило нас нас к пониманию биологического смысла явления? В самом деле, для чего нужно знать, что береговая линия Англии имеет размерность 1.3? Конечно, **фрактальная размерность действительно очень полезна, скажем, в том случае, когда нужно сравнить свойства реального объекта и его компьютерной симуляции.**

В стандартных книгах по теории фракталов обычно не приводят примеров из ботаники. Однако рассматривание картинок из атласа высших растений убеждает в том, что **границы, скажем, листьев бывают ничуть не менее изрезаны, чем береговая линия Англии**, и для количественной характеристики этой изрезанности могла бы пригодиться фрактальная размерность. Конечно, только опыт работы может сказать, насколько такой признак полезен для целей систематики.

Другой пример из области ботаники связан с понятием псевдоцикла, возникновения очень сходных, но не гомологичных явлений различных масштабов в серии сопоставимых друг с другом растений. Например, соцветие может приобрести большое сходство с отдельным цветком. Нетрудно убедиться, что именно таким образом, с помощью ряда фигур, все усложняющихся и обретающих новые структурные ярусы, подобные ярусам предыдущего масштаба, и строят примеры фракталов в математике. Конечно, в ботанических примерах количество таких ярусов невелико и обычно не превосходит 3–4, а в математических работах говорят о бесконечно увеличивающемся количестве ярусов. Физик скажет, что их должно быть ну хотя бы штук десять. Конечно, полезно понимать, что понятие псевдоцикла вписывается в какой-то общенаучный контекст, но даст ли здесь теория фракталов нечто большее, может показать только опыт конкретных исследований.

В целом кажется, что **концепция фракталов действительно открыла новые горизонты в понимании природы,** однако конкретная роль геометрии фракталов в науке достаточно ограничена. Сегодня математика знает многие другие **пути описания необычных пространственных структур**, **которые вполне могут представлять интерес для биологии**. Другой вопрос, что, говоря современным языком, степень раскрученности этих представлений совершенно несопоставима с раскрученностью теории фракталов. Чтобы не быть голословным, приведем один из возможных примеров.

Рассмотрим популяцию бактерий, которая в начальный момент t=0 распределена в пространстве с концентрацией $\varphi_0(x)$. Пусть условия жизни этих бактерий пространственно неоднородны так, что их скорость размножения представляет собой гауссову случайную величину U(x) (точнее, гауссово случайное поле с достаточно быстрым убыванием пространственных корреляций) с нулевым среднем и дисперсией σ^2. Если пренебречь всеми другими факторами, то концентрация бактерий в последующие моменты времени растет экспоненциально со временем и равна, очевидно,

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x)\exp(U(x)t). \qquad (3)$$

На первый взгляд кажется, что средняя концентрация тоже должна расти экспоненциально со скоростью порядка σ. Поразительно, что на самом деле средняя концентрация бактерий растет гораздо быстрее:

$$\langle\varphi(x, t)\rangle = \varphi_0(x)\exp(\sigma^2 t^2/2). \qquad (4)$$

Хотя (4) получается из (3) с помощью непосредственного подсчета по формуле, дающей определение средней концентрации, этот результат нарушает все стандартные представления здравого смысла и статистической физики. Разгадка парадокса состоит в том, что гауссова величина U может принимать значения, сколь угодно превосходящие σ, правда, с очень малой вероятностью. Максимумы величины U образуют очень редкие максимумы в пространстве. Чем дальше такой максимум отстоит от точки, в которой находится наблюдатель, тем большее значение в нем может принять скорость роста U и тем быстрее в этой точке растет концентрация бактерий. Скорость роста средней концентрации определяется очень и очень удаленными максимумами U.

Если ввести в рассмотрение еще один фактор – диффузию бактерий с коэффициентом диффузии ν, то задача сведется к исследованию поведения решений уравнения

$$\partial\varphi/\partial t = U\varphi + \nu\,\Delta\varphi, \qquad (5)$$

которое хорошо изучено в математике и физике, поскольку оно очень похоже на главное уравнение квантовой механики – уравнение Шрёдингера.

Специалисты, изучавшие уравнение (5), первоначально рассматривали микробиологическую фразеологию как средство сделать математические выкладки более понятными. Однако анализ ссылок на этот круг работ показывает, что микробиологи отнеслись к выводам вполне серьезно. Более того, поведение величины φ до неприятности напоминает поведение людей в начальный период развития капитализма, описанное, скажем, в работах Ф.Броделя. Сначала отдельные максимумы U образуют зоны влияния, в которых концентрация φ определяется диффузией из области близкого максимума. Позже различные зоны влияния соприкасаются друг с другом и начинается конкуренция, в результате которой зона влияния более сильного максимума поглощает зону конкурента. В целом картина действительно очень напоминает картину смены Амстердама, Лондона, Нью-Йорка в качестве центров мировой экономической жизни.

Рассмотренный пример допускает самые разнообразные обобщения. Например, можно сделать случайную скорость размножения меняющейся не только в пространстве, но и во времени. Чем более сложной становится модель, тем большим становится карикатурное сходство с описанием человеческой жизни, так что хочется спросить, неужели люди в своем поведении действительно не выходят за рамки примитивного уравнения (5)?

Во второй половине XX века **концепция фракталов привела к** существенному **изменению взгляда на возможные пространственные конфигурации окружающих нас тел и их структуру.** Соответствующие геометрические образы были сконструированы математиками около столетия назад, но только недавно они стали достоянием широкого круга естествоиспытателей. **Несомненно родство между понятиями фрактальной геометрии и некоторыми представлениями, возникшими в ходе развития ботаники.**

Библиография

Галилей Г. Диалог о двух системах мира. М.; Л., 1948

Гомологии в ботанике: Опыт и рефлексия. СПб., 2001

Жизнь растений/Под ред. А.Л.Тахтаджян. М., 1982

Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика//Успехи физ. Наук. 1985. Т. 146. № 3

Кузнецова Т.В., Пряхина Н.И., Яковлев Г.П. Соцветия: Морфологическая классификация. СПб., 1992.

Мун Ф. Хаотические колебания. М., 1990

Павлинов И.Я., Микешина Н.Г. Принципы и методы геометрической морфометрии//Журнал общей биологии. 2002. Т. 63. № 6

Садовничий В.А. Математическое образование: настоящее и будущее. М., 2000.

Свифт Дж. Памфлеты. М., 1955

Федер Е. Фракталы. М., 1991

Франковский А. Примечания/Дж. Свифт. Путешествия Гулливера. Л., 1928

Anufriev A., Sokoloff D. Fractal properties of geodynamo models//Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1994. V. 74. № 1–4

Avnir D., Biham O., Lidar D., Malcai O. Is the geometry of nature fractal?//Science. 1998. V. 279

Kuznetzova T.V. Angiosperm inflorescences and different types of their structural organization. Flora, 1988

Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. New York, 1982

Rothmaler W. Exursionsflora. Bd. 3. Berlin, 1987

Sokoloff D. Fractals self-similarity and structures. Wulenia, 2002

Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D. The Almighty Chance. Singapur, 1990

Тема № 273(47)
Эфир 24.06.03
Хронометраж 50:11